Notiztitel: Universelle Konstruktionen

Version 1.0

Bei vielen grundlegenden und wichtigen mathematischen Objekten spricht man von „einer universellen Eigenschaft", die von Fall zu Fall verschiedene Ausprägungen hat, – oder man sagt, dass das entsprechende Objekt „ein universelles Problem" löst.

Die Lösung eines universellen Problems (im engeren Sinne) ist zum Beispiel der projektive Limes eines entsprechenden Systems, oder die Vervollständigung eines metrischen Raumes.

Eine homogene und präzise Formulierung dieser universellen Eigenschaften und Konstruktionen lässt sich im Rahmen der Kategorien und Funktoren finden.

KONTRAVARIANTE DARSTELLBARE FUNKTOREN

Sei $\underline{C}$ eine Kategorie mit den Morphismenmengen $Mor_{\underline{C}}(X,Y)$ für Objekte X,Y aus $\underline{C}$. Jedes Objekt X aus $\underline{C}$ definiert den kontravarianten Funktor $h_X : \underline{C}^\circ \longrightarrow \underline{Set}$ von der zu $\underline{C}$ dualen Kategorie $\underline{C}^\circ$ in die Kategorie $\underline{Set}$ der Mengen:

$$h_X(Y) := Mor_{\underline{C}}(Y,X) \quad \text{und für } f \in Mor_{\underline{C}}(Y,Z)$$
$$h_X(f) : h_X(Z) \longrightarrow h_X(Y), \quad g \longmapsto gf$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sei $u \in \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(X,X')$. Für alle Y in $\underline{C}$ und $g \in h_X(Y) = \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(Y,X)$ gilt $ug \in \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(Y,X') = h_{X'}(Y)$; und $h_u(Y) : h_X(Y) \to h_{X'}(Y)$, $g \mapsto ug$, definiert eine eine natürliche Transformation $h_u : h_X \to h_{X'}$:

$$h_u(Y) \circ h_X(f) = h_{X'}(f) \circ h_u(Z),$$ also kommutiert

$$\begin{tikzcd} h_X(Z) \arrow[r, "h_X(f)"] \arrow[d, "h_u(Z)"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_u(Y)"] \\ h_{X'}(Z) \arrow[r, "h_{X'}(f)"'] & h_{X'}(Y) \end{tikzcd}$$

Das heißt für $g \in h_X(Z)$: $\quad u(gf) = (ug)f$.

h_u kann auch als Morphismus der Kategorie

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^\circ, \underline{\mathrm{Set}})$$

der kontravarianten Funktoren verstanden werden.

Und die Definitionen h_X mit h_u legen einen Funktor

$$h : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^\circ, \underline{\mathrm{Set}}),$$

den kanonischen kovarianten Funktor, fest.

Sei jetzt $F : \underline{C}^\circ \longrightarrow \underline{Set}$ irgendein kontravarianter Funktor und $\nu : h_X \to F$ eine natürliche Transformation: Für $Y \in \underline{C}$ ist $\nu(Y) : h_X(Y) \to F(Y)$ eine Abbildung, so dass für alle Morphismen $g : Y \to Z$ das Diagramm

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} h_X(Z) & \xrightarrow{h_X(g)} & h_X(Y) \\ \nu(Z)\downarrow & & \downarrow \nu(Y) \\ F(Z) & \longrightarrow & F(Y) \end{array} \quad .$$

Eine solche natürliche Transformation liefert eine kanonische Identifikation der Menge $F(X)$ mit $\mathrm{Hom}(h_X, F)$:

Zunächst erhalten wir $\nu(X) : h_X(X) = \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(X, X) \to F(X)$ also auch

$$\alpha(\nu) := \nu(X)(1_X) \in F(X).$$

Insgesamt wird so eine Abbildung

$$\alpha : \mathrm{Hom}(h_X, F) \longrightarrow F(X)$$

induziert.

Sei umgekehrt $\xi \in F(X)$. Zu $v \in h_X(Y)$ hat man die Abbildung

$$F(v) : F(X) \longrightarrow F(Y) \quad \text{und folglich eine Abb.}$$

$$h_X(Y) \to F(Y), \quad v \longmapsto F(v)(\xi),$$

die mit $\beta(\xi)(Y)$ bezeichnet werde.
Dann ist

$$\beta(\xi) : h_X \to F$$

eine natürliche Transformation und damit eine kanonische Abbildung

$$\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}(h_X, F).$$

PROPOSITION: Die Abbildungen α und β sind invers zueinander:

Beweis: $\alpha \circ \beta(\xi) = ?$. Für Y in $\underline{C}$ ist $\beta(\xi)(Y) : h_X(Y) \to F(Y)$ die Abb. $v \mapsto F(v)(\xi)$. Daher:

$$\alpha(\beta(\xi)) = \beta(\xi)(X)(1_X) = F(1_X)(\xi) = 1_{F(X)}\xi = \xi.$$

$\beta \circ \alpha(\nu) = ?$ Für alle Y aus $\underline{C}$ ist $\beta(\alpha(\nu))(Y)$ die Abb. $v \mapsto F(v)(\nu(X)1_X) = \nu(Y)h_X(v)(1_X)$ (nach *)
also $v \longmapsto \nu(Y)(v)$.
Also $\beta(\alpha(\nu))(Y) = \nu(Y)$ und damit

$$\beta \circ \alpha(\nu) = \nu.$$

$\square$

Wir kommen nach diesen Vorbereitungen zu der maßgeblichen Definition dieses Textes:

DEFINITION: Sei F ein kontravarianter Funktor von $\underline{C}$ nach $\underline{Set}$, $F: \underline{C}^\circ \longrightarrow \underline{Set}$.
F heißt *darstellbar*, wenn es ein X in $\underline{C}$ so gibt, dass F zu h_X isomorph ist.

Es wird also verlangt, dass es eine natürliche Transformation

$$\nu: h_X \longrightarrow F$$

gibt (die nach Proposition „bijektiv" ist). Eine solche natürliche Transformation ist nach Prop. durch ein $\xi \in F(X)$ gegeben, so dass

$$h_X(Y) \longrightarrow F(Y), \quad g \longmapsto F(g)(\xi),$$

für alle Y bijektiv ist.

SPRACHGEBRAUCH: Unter diesen Gegebenheiten „*stellt*" (X, ξ) den Funktor F „dar".
Auch: (X, ξ) „löst" das durch F gegebene „universelle" Problem.

BEMERKUNG: Im Falle der Existenz von (X, ξ) liegt Eindeutigkeit bis auf Isomorphie vor. Das bedeutet, wenn (X', ξ') den Funktor F ebenfalls darstellt, so gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi: X' \rightarrow X$$

mit $F(\varphi)\,\xi = \xi'$.

Das ergibt sich aus den Bijektionen

$$h_X(X') \longrightarrow F(X'), \quad g \longmapsto F(g)\xi \; ;$$

$$h_{X'}(X) \longrightarrow F(X), \quad g' \longmapsto F(g')\xi' :$$

Man findet $\varphi \in h_X(X')$ mit $F(\varphi)\xi = \xi'$ und $\varphi' \in h_{X'}(X)$ mit $F(\varphi')\xi' = \xi$, also $\varphi\varphi' = i_X$, $\varphi'\varphi = i_{X'}$.

FOLGERUNG: Aufgrund der letzten Bemerkung ist die Frage nach der Darstellbarkeit eines Funktors $F : \underline{C}^\circ \to \underline{Set}$ äquivalent mit der Existenz eines darstellenden Paares (X, ξ). Die Konstruktion eines solchen Paares nennt man daher auch gelegentlich „universelle Konstruktion".

BEMERKUNG: Der kanonische Funktor

$$h : \underline{C} \longrightarrow \underline{Hom}(\underline{C}^\circ, \underline{Set})$$

ist volltreu, d.h.

$$Mor_{\underline{C}}(X, Z) \to \underline{Hom}(h_X, h_Z)$$

$$f \longmapsto [\, h_X(Y) \to h_Z(Y) : v \longmapsto fv \,]$$

$$v \in Hom(Y, X) = h_X(Y) \; .$$

BEISPIELE

BEISPIEL 1: Produkt. Seien X_1, X_2 zwei Objekte in der Kategorie $\underline{C}$. Der kontravariante Funktor F ist in dieser Situation durch

$$F(Y) := \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(Y, X_1) \times \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(Y, X_2), \quad Y \text{ in } \underline{C}$$

$$F(v) : F(Z) \to F(Y), \ (h_1, h_2) \mapsto (h_1 v, h_2 v), \ v \in \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(Y, Z)$$

gegeben. Das „Produkt" von X_1, X_2 in $\underline{C}$ ist jedes darstellende Element X mit $\xi \in F(X)$. Im Falle der Kategorie $\underline{Grp}$ der Gruppen (z.B.), existiert das Produkt offensichtlich: Für zwei Gruppen G, H definieren wir auf der Menge (!) $G \times H$ der Paare (g, h), $g \in G$, $h \in H$ das Produkt

$$(g, h)(g', h') := (gg', hh').$$

$G \times H$ ist dann eine Gruppe und die mengentheoretischen Projektionen $pr_G : G \times H \to G$, $pr_H : G \times H \to H$ sind Homomorphismen von Gruppen, also Morphismen in $\underline{Grp}$.
$X = G \times H$ mit $\xi = (pr_G, pr_H) \in F(X)$ stellt den Funktor F dar.
Sehr viele Kategorien besitzen Produkte, z.B die Kategorie

- $\underline{\text{Vekt}}_k$ der Vektorräume über einem Körper k
- $\underline{\text{Ban}}$ der Banachräume
- $\underline{C^*}$ der C^*-Algebren

- Top der topologischen Räume
- Lie der Lie-Gruppen
- Diff der differenzierbaren Mft mit diffb. Abb. als Morphismen

Die Kategorie Lor der Lorentzmannigfaltigkeiten mit (lokalen) Isometrien als Morphismen hat keine Produkte: Das Produkt Z von X und Y müsste dieselbe Dimension wie X und zugleich wie Y haben.

BEISPIEL 2: Analog: Mehrfache (endliche) und unendliche Produkte.

BEISPIEL 3: Projektive Limites. Ein projektives System in $\underline{C}$ ist eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Objekten aus $\underline{C}$, die bezüglich einer partiell geordneten Menge I indiziert ist, zusammen mit Morphismen

$$p_{ij} : X_j \to X_i \quad \text{für} \quad i \leq j ,$$

so dass stets

$$p_{ik} = p_{ij}\, p_{jk} \quad \text{für} \quad i \leq j \leq k$$

gilt.

Der <u>projektive Limes</u> des projektiven Systems

$$(X_i, p_{ij})_I$$

ist (im Falle der Existenz) ein Objekt X in $\underline{C}$ zusammen mit Morphismen

$$p_i : X \to X_i \, , \quad \text{mit} \quad p_i = p_{ij} \cdot p_j \quad \text{für } i \le j,$$

so dass die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt ist:

Für jede Familie g_i von Morphismen $g_i \in Mor_{\underline{C}}(Y, X_i)$ mit $g_i = p_{ij} g_j$ für $i \le j$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$g : Y \to X \, ,$$

so dass $g_i = p_i g$ für $i \in I$ gilt.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_i"'] & & X \arrow[dl, "p_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Notationen: $X = \varprojlim X_i$, $g = \varprojlim g_i$.

Im Falle der Existenz ist (X, g) das darstellende Paar des Funktors

$$F(Y) = \varprojlim Mor_{\underline{C}}(Y, X_i) \, ,$$

wobei rechts der mengentheoretische projektive

Limes stellt.
Der projektive Limes verallgemeinert offensichtlich die Beispiele 1 und 2.

Im Grp, $\underline{\text{Vekt}}_k$ und Top existieren die projektiven Limites; in Ban, Diff, Lie, C^* nur die mit endlicher Indexmenge I

BEISPIEL 4: Das finale Objekt. Das ist das darstellende Objekt zum Funktor $F: \underline{C}^o \to \underline{Set}$

$$F(Y) = \{*\} \qquad \text{für alle } Y \text{ in } \underline{C} \quad (* \text{ ein Symbol})$$
$$F(g) = id_{\{*\}} \qquad \text{für } g \in Mor_{\underline{C}}(Y, Y').$$

Wenn $(\omega, *)$ den Funktor F darstellt, so dass für Y in $\underline{C}$ die Morphismenmenge $Mor_{\underline{C}}(Y, \omega) = h_\omega(Y)$ stets einelementig ist.

In Grp ist jede triviale Gruppe $\omega = \{1\}$ ein finales Objekt in $\underline{\text{Vekt}}_k$ ist es der 0-dim. Vektorraum 0.
In der Kategorie $\underline{\text{Erw}}_k$ der Körpererweiterungen $E \supset k$ von k mit $Hom_k(E, E')$ als Morphismen ist k ein finales Objekt.

Top und Diff haben keine finalen Objekte.

BEISPIEL 5:

Sei S ein Objekt in $\underline{C}$ und $\underline{C}/_S$ die Kategorie der S-Objekte von $\underline{C}$: Objekte sind die Morphismen $f: Y \to S$ und Morphismen

$$\varphi: \begin{array}{c} Y \\ \downarrow f \\ S \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} Y' \\ \downarrow f' \\ S \end{array}$$

sind die $\varphi \in Mor_{\underline{C}}(Y, Y')$ mit $f = f'\varphi$.
Dann ist $id_S : S \to S$ finales Element.

Ein Produkt in $\underline{C}/_S$ von $Y \xrightarrow[f]{} S$ und $Z \xrightarrow[g]{} S$ nennt man „Faserprodukt" von f und g (bzw. Y und Z) geschrieben $Y \times_S Z$.
Natürlich gibt es in $\underline{Set}$ das Faserprodukt immer, es gilt einfach

$$Y \times_S Z = \{ (y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z) \} \subset Y \times Z .$$

DARSTELLUNG VON KOVARIANTEN FUNKTOREN

Ganz analog zu h_X definiert jedes Objekt X in $\underline{C}$ einen kovarianten Funktor $h'_X : \underline{C} \to \underline{Set}$, durch

$$h'_X(Y) := Mor_{\underline{C}}(X, Y)$$

$$h'_X(f) : h'_X(Y) \to h'_X(Z), \; g \mapsto fg, \quad \text{für } f \in Mor_{\underline{C}}(Y, Z).$$

h'_X induziert einen kanonischen kovarianten Funktor

$$h' : \underline{C}^\circ \longrightarrow Hom(\underline{C}, \underline{Set}).$$

Ein kovarianter Funktor $F: \underline{C} \to \underline{Set}$ heißt darstellbar, wenn es X in $\underline{C}$ gibt, so dass h'_X und F isomorph sind, wenn es also (analog zum kontravarianten Fall) ein Paar (X, ξ) gibt mit $\xi \in F(X)$, so dass wieder

$$\begin{array}{ccc} h'_X(Y) & \longrightarrow & F(Y) \\ \psi & & \\ b & \longmapsto & F(b)(\xi) \end{array}$$

bijektiv ist.

BEISPIEL 6: Coprodukt und induktiver Limes: „Dualisierung der Beispiele 1–3!
Das Coprodukt (auch (direkte) Summe genannt) von X_1, X_2 in $\underline{C}$ ist definiert als darstellendes Objekt des kovarianten Funktors

$$F(Y) := \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(X_1, Y) \times \mathrm{Mor}_{\underline{C}}(X_2, Y),$$

das wir mit $X_1 \amalg X_2$ bezeichnen. $X_1 \amalg X_2$ mit $\xi = (i_1, i_2) \in F(X)$ stellt also F dar, wenn

$$\mathrm{Mor}_{\underline{C}}(X_1 \amalg X_2, Y) \to F(Y), \quad g \mapsto F(g)(\xi) = (gi_1, gi_2)$$

bijektiv ist.
In $\underline{Set}$ nimmt man für $X_1 \amalg X_2$ einfach die disjunkte Vereinigung mit den natürlichen Injektionen i_1, i_2.

In $\underline{\text{Vekt}}_k$ kennen wir $X_1 \amalg X_2$ als die (algebraische) direkte Summe $X_1 \oplus X_2$.
Auch in $\underline{\text{Grp}}$ existiert das Coprodukt.
Ebenso existieren in $\underline{\text{Set}}$, $\underline{\text{Grp}}$, $\underline{\text{Top}}$, $\underline{\text{Vekt}}_k$ beliebige induktive Limites.

<u>BEISPIEL 7</u>: Tensorprodukt. Sei $\underline{C}$ die Kategorie $\underline{\text{Vekt}}_k$ der Vektorräume oder die Kategorie der R-Moduln über einem kommutativen Ring. Für 2 Objekte X_1, X_2 wird durch

$$F(Y) = \text{Bil}(X_1 \times X_2, Y), \quad Y \text{ in } \underline{C}$$
$$F(g): \text{Bil}(X_1 \times X_2, Y) \to \text{Bil}(X_1 \times X_2, Z), \; b \mapsto gb,$$

für $g \in \text{Mor}_C(Y, Z)$ ein kovarianter Funktor definiert. Das darstellende Objekt $X_1 \otimes X_2$ mit $\otimes \in F(X_1 \otimes X_2)$ ist das Tensorprodukt:
Zu jeder bilinearen Abb. $b: X_1 \times X_2 \to Z$ existiert genau ein $\hat{b} \in \text{Hom}_k(X_1 \otimes X_2, Z)$ mit $b = \hat{b} \circ \otimes$, d.h. die Abb. $\text{Hom}_k(X_1 \otimes X_2, Z) = h'_{X_1 \otimes X_2}(Z) \to F(Z)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \otimes$, ist bijektiv.

Weitere Beispiele sind diverse „Hüllenbildungen":

<u>BEISPIEL 8</u>: Vervollständigung in $\underline{\text{Ban}}$. Sei N ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei

$$F(Y) = B(N, Y) \quad (\text{beschränkte lin. Abb.})$$

$$F(g) : B(N,Y) \to B(N,Z), \quad A \longmapsto g \circ A.$$

Die Vervollständigung $\hat{N}$ in Ban mit der kanonischen Einbettung $i : N \to \hat{N}$.

Varianten:

Funktioniert auch, wenn N nur mit Seminorm versehen ist.

Innerhalb der Kategorie der Hilberträume analog. Allgemeiner in der Kategorie Un der uniformen Räume, der metrischen Räume und auch der lokalkonvexen topologischen Vektorräume Lok.

Beispiel 9: Freie Gruppen. Zu S aus Set sei

$$F(G) = Mor_{Set}(S, G),$$

also die Menge aller Abbildungen $S \xrightarrow{\varphi} G$ mit

$$F(g) : F(G) \to F(H), \quad \varphi \mapsto g\varphi,$$

für $g \in Mor_{Grp}(G, H)$. Dieser Funktor ist darstellbar durch die freie Gruppe $\langle S \rangle$ mit $i_S : S \to \langle S \rangle$. $\langle S \rangle$ kann man definieren als Wörter mit dem Alphabet $S \cup S^{-1}$, wobei auch das leere Wort $\emptyset$ (das Einselement) zugelassen wird und wo Wörter, die sich um $\bar{a}^1 a$ oder $a\bar{a}^1$, $a \in S$, unterscheiden, identifiziert werden: $cbba\bar{a}^1c = cbbc$ etc.

Wir haben die universelle Eigenschaft:
Für alle Abbildungen $f: S \to H$ in eine beliebige Gruppe H gibt es genau einen Gruppenhomom. $\varphi: H \to G$ mit $i_S = \varphi \circ f$.

Variante: Beschränkt man den Funktor F auf die Kategorie $\underline{Ab}$ der abelschen Gruppen, so erhält man die freie abelsche Gruppe $A(S)$.
Beachte: $\langle S \rangle$ ist nicht abelsch, wenn S mehr als ein Element enthält. $A(S)$ lässt sich als Coprodukt in $\underline{Ab}$ verstehen.

<u>BEISPIEL</u> 10: <u>Komplexifizierung</u> von Lie-Gruppen.
Sei $\underline{Lie}_{\mathbb{C}}$ die Kategorie der komplexen Lie-Gruppen (endlicher Dimension) mit den differenzierbaren Homomorphismen als Morphismen. Sei G eine reelle Lie-Gruppe. Der Funktor $F(H) = \mathrm{Lie}(G,H) = \{\varphi: G \to H \mid \varphi \text{ diffb. Homomorphismus}\}$ soll dargestellt werden. Wenn darstellbar durch $G_{\mathbb{C}}$ mit $j \in F(G_{\mathbb{C}})$, so gibt es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Lie}(G,H)$ in eine komplexe Lie-Gruppe H einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\hat{\varphi} \in \mathrm{Mor}_{\underline{Lie}_{\mathbb{C}}}(G_{\mathbb{C}}, H)$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ j$. Nicht alle reellen Lie-Gruppen haben eine solche Komplexifizierung, aber die kompakten.
Beachte $SU(2)_{\mathbb{C}} \cong SL(2,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$!
Varianten: Lie-Gruppen mit Modellen in Hilbert-

räumen, Banachräumen, lokalkonvexen Räumen.

<u>BEISPIEL 11</u>: Tensoralgebra. Sei V ein Vektorraum über k. Zur Kategorie $\underline{Alg}_k$ der k-Algebren (mit 1) hat man den kovarianten Funktor

$$F : \underline{Alg}_k \longrightarrow \underline{Set}, \quad F(A) = \mathrm{Hom}_k(V, A).$$

F ist darstellbar durch die Tensoralgebra

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V, \quad T^n V = V \otimes \dots \otimes V, \text{ mit } i_V : V \to TV.$$

In der Tat gibt es zu jeder linearen Abbildung $L : V \to A$, $A \in \underline{Alg}_k$, einen Algebrahomomorphismus $\hat{L} : TV \to A$ mit $L = \hat{L} \circ i_V$. $\hat{L}$ wird durch $\hat{L}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = L(v_1) L(v_2) \dots L(v_n)$ definiert.

Varianten: Symmetrische Algebra, äußere Algebra.

<u>BEISPIEL 12</u>. Universelle Einhüllende. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über k und sei $F : \underline{Alg}_k \to \underline{Set}$ der Funktor:

$$F(A) := \{ \varphi : \mathfrak{g} \to A \mid \forall X, Y \in \mathfrak{g} : \varphi([X,Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X) \}$$

Dann ist F darstellbar und das darstellende Element ist die <u>universelle Einhüllende</u> $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ wird konstruiert als Quotient von $T\mathfrak{g}$ bezüglich des Ideals $\mathfrak{I}$, das von $X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]$, $X,Y\in\mathfrak{g}$, erzeugt wird.

<u>BEISPIEL 13:</u> Diverse Quotienten in bestimmten Kategorien können als Lösungen universeller Probleme aufgefasst werden. Ganz einfach in $\underline{C} = \underline{Grp}$ oder $\underline{C} = \underline{Vect}_k$: Sei $V\subset W$ Untervektorraum, dann ist $W/_V$ darstellendes Objekt von

$$F(Y) = \{\varphi : W \to Y \mid \varphi \text{ linear } \& \ \varphi|_V = 0\}.$$

Im $\underline{Top}$ erhält man zu jeder Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem Z in $\underline{Top}$ einen Quotienten, nämlich $Z/_\sim$ (als Menge) mit der Quotiententopologie.

Im $\underline{Diff}$ erhält man selbst zu „guten" Äquivalenzrelationen $\sim$ auf einer Mannigfaltigkeit X in der Regel auf $X/_\sim$ keine diffbare Struktur, die $X/_\sim$ zum Quotienten macht. Gemeint ist eine diffbare Struktur auf $X/_\sim$ so dass die diffbaren Abb. $f: X/_\sim \to Y$ in eine Mannigfaltigkeit Y <u>genau</u> den diffbaren $g: X\to Y$ entsprechen, die $\sim$ respektieren, d.h. $g = f\circ\pi$ bzgl. der kanonischen Projektion $\pi: X\to X/_\sim$.

Beispiel 14: CAR-Algebra. Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Der Funktor $F: \underline{C^*} \to \underline{Set}$

$$F(B) = \{a: \mathcal{H} \to B \mid \text{kpx. antilinear \& stetig mit } \{a(f), a(g)^*\} = \langle f, g \rangle 1_B \ \& \ \{a(f), a(g)\} = 0 \ \forall f, g \in \mathcal{H}\}$$

hat die CAR-Algebra $CAR(\mathcal{H})$ als darstellendes Element.

BEISPIEL 15: CCR-Algebra (im Sinne der Vorlesung). (V, ω) sei symplektischer Vektorraum und $F: \underline{C^*} \to \underline{Set}$ der Funktor

$$F(B) = \{W: V \to B \mid W(0) = 1 \ \& \ W(-f) = W(f)^* \ \& \ W(f)W(g) = \exp(\tfrac{i}{2}\omega(f,g))\, W(f+g) \ \forall f, g \in V\}.$$

F wird dargestellt durch die CCR-Algebra zu V, ω.

Variante: Darstellung durch $*$-Algebra und dabei $[a(f), a(g)^*]$ direkt.

Weitere Varianten: Diverse Versionen von Cliffordalgebren innerhalb $\underline{Alg}_{\mathbb{R}}$, $\underline{Alg}_{\mathbb{C}}$ oder $\underline{C^*}$ oder nur $*$-Algebren.

Beispiel 16: Lokalisierung. Sei R ein kommutatives Ring mit 1 und $S \subset R \setminus \{0\}$ eine multiplikative Menge (d.h. $1 \in S$ und für $a, b \in S$: $ab \in S$). Sei $\underline{Ring}$ die Kategorie der Ringe. Der Funktor $F: \underline{Ring} \to \underline{Set}$

$$F(R') = \{\varphi \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Ring}}}(R, R') \mid \varphi(S) \subset R'^{\times}\}$$

($R'^{\times} = \{r \in R' \mid \exists s \in R' : rs = 1\}$) ist darstellbar und das darstellende Objekt $S^{-1}R$ heißt die Lokalisierung von R bezüglich S.

Typische Fälle:

$S = R \setminus \mathfrak{p}$ mit einem Primideal. $S^{-1}R = R_{\mathfrak{p}}$ heißt dann der lokale Ring an der Stelle.

$S = R \setminus \{0\}$ im Falle eines Integritätsringes R: $S^{-1}R$ ist Körper, der Quotientenkörper von R.

Beispiel 17: Polynomring. $k[T]$ stellt in $\underline{\mathrm{Alg}}_k$ den Funktor

$$F(A) = A \quad \text{(als Menge, Vergissfunktor)}$$

dar. Analog: $k[T_1, \dots T_n]$ den Funktor $F(A) = A^n$ und $k[T, T^{-1}]$ den Funktor $F(A) = A^{\times}$ (Gruppe der Einheiten).

Beispiel 18: Gruppenring / algebra (verwandt zu 17): G sei eine Gruppe und $F : \underline{\mathrm{Alg}}_k \to \underline{\mathrm{Set}}$ sei durch

$$F(A) = \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Grp}}}(G, A^{\times})$$

gegeben. F ist darstellbar mit dem Gruppenring $k[G]$ als darstellendes Objekt:

$$k[G] = \{\sum_{g \in G} x_g g \mid \text{endl. formale Summen}\}.$$

Weitere Themen:

Vergissfunktoren $\underline{\mathrm{Vekt}}_K \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$, $\underline{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$

Fundamentalgruppe als derA. Funktor

$H^1(X, \mathbb{Z})$ stellt kontravarianten Funktor dar

$H^q(X, \mathbb{Z})$, $H_p(X, \mathbb{Z})$, ...

Eilenberg - Maclane - Räume

Klassifizierende Räume EG, BG

Algebraische Abschluss eines Körpers

Holomorphiehülle

Kompaktifizierung, Reellkompaktifizierung, ...

Modulräume , moduli stacks,

...

Yoneda-Lemma

Adjungierte Funktoren